3-12-19

<u>Άσκηση</u>: $f_n: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ υπάρχει $\forall x\in A\subseteq \mathbb{R}$, $\bar{A}=\mathbb{R}$

και f_n: μονότονη

<u>Νδο</u> $\lim f_n(x)$ υπάρχει $\forall\, x\in \mathbb{R}\setminus B$ όπου B το πολύ αριθμήσιμο

<u>Λύση:</u>

<u>Ειδική Περίπτωση</u> f_n αύξουσα $\forall n$

<u>Θέτω</u> $f(x)=\limsup f_n(x)$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$

$g(x)=\liminf f_n(x)$

<u>Έχουμε το εξής επιχείρημα:</u>

$\forall x_0\in\mathbb{R}$ $\exists\, x_1, x_2\in A$ τω $x_1<x_0<x_2 \xRightarrow[\text{αύξουσα}]{f_n}$

$\Rightarrow f_n(x_1)\le f_n(x_0)\le f_n(x_2)$

$\Rightarrow \limsup f_n(x_1)\le \limsup f_n(x_0)\le \limsup f_n(x_2)$

$\Rightarrow \underset{\in\mathbb{R}}{\boxed{f(x_1)}}\le f(x_0)\le \underset{\in\mathbb{R}}{\boxed{f(x_2)}}$

<u>Δείχνω ότι f αύξουσα:</u>

Έστω $x_1', x_2'\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow f_n(x_1')\le f_n(x_2')$ $\boxed{\text{αν } x_1<x_2}$

$\Rightarrow \boxed{f(x_1')\le f(x_2')}$

$\Rightarrow \boxed{f \text{ γν. αύξουσα}}$

<u>Όμοια:</u> έχουμε ότι g $\boxed{\text{αύξουσα συνάρτηση}}$

Υπενθύμιση από Απειροστικό:
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μονότονη $\Longrightarrow$ Το σύνολο των σημείων συνσσώρευσης της f είναι το πολύ αριθμήσιμο

Έστω Γ_1 το ~~σύνολο~~ σύνολο σημείων ασυνέχειας της f.
Γ_2 —//— —//— g

Θέτω: $\boxed{\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2}$ το πολύ αριθμήσιμο.

Έστω $\xi \in \mathbb{R} \setminus \Gamma$.

Θδο υπάρχει το $\lim f_n(\xi)$

Έστω $\varepsilon > 0$

f συνεχής στο ξ: $\exists \delta_1 > 0$ τω $\forall x \in (\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$: $|f(x) - \xi(x)| < \varepsilon$

g συνεχής στο ξ: $\exists \delta_2 > 0$ τω $\forall x \in (\xi - \delta_2, \xi + \delta_2)$: $|g(x) - \xi(x)| < \varepsilon$

Θέτω: $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Τότε υπάρχει $\xi' \in A \cap (\xi - \delta, \xi + \delta)$

$$|f(\xi) - g(\xi)| = |(f(x) - f(\xi')) + (f(\xi') - g(\xi))|$$

$$\leq |f(x) - f(\xi')| + |f(\xi') - g(\xi)|$$

Όμως: $f(\xi') = g(\xi')$

$< \varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon.$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow f(x) = g(\xi) \Rightarrow \lim f_n(\xi)$ υπάρχει

Συμπερασματικά: f_n αύξουσα $\forall n$. Αν Γ το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f και της g: $\forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \Gamma$ $\lim f_n(\xi)$ υπάρχει.

Γενική Περίπτωση Χωρίς βλάβη της γενικότητας έχουμε: υποθέτουμε ότι για άπειρα n f_n αύξουσα και για άπειρα n f_n φθίνουσα.

Έστω $\{f_{k_n}\}$ η υπακολουθία των αύξουσων συναρτήσεων.
$\{f_{\ell_n}\}$ η υπακολουθία των φθίνουσων συναρτήσεων.

Υπενθύμιση
ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$, $\{a_{k_n}\}$, $\{a_{\ell_n}\}$ υπακολουθίες της $\{a_n\}$ με τις εξής ιδιότητες:

① $\{k_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$
$\{k_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{\ell_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$

② $a_{k_n}, a_{\ell_n} \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Τότε $a_n \to \ell$.

Αρκεί ν.δ.ο $\lim f_{k_n}(x) = \lim f_{\ell_n}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus B$ όπου B το πολύ αριθμήσιμο

Θέτω: $h_1(x) = \limsup f_{k_n}(x)$

$h_2(x) = \limsup f_{\ell_n}(x)$

Έστω B το σύνολο σημείων ασυνέχειας της h_1 ή της h_2

Έστω $\xi \in \mathbb{R} \setminus B$: $\exists \delta_1 > 0$ τ.ω $\forall x \in (\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$: $|h_1(x) - h_1(\xi)| < \varepsilon$

$\exists \delta_2 > 0$ τ.ω $\forall x \in (\xi - \delta_2, \xi + \delta_2)$: $|h_2(x) - h_2(\xi)| < \varepsilon$

Έστω $\xi' \in A \cap (\xi - \delta_1, \xi + \delta_1) \cap (\xi - \delta_2, \xi + \delta_2)$: $h_1(\xi') = h_2(\xi')$

$|h_1(\xi) - h_2(\xi)| \leq |h_1(\xi) - h_1(\xi')| + |h_2(\xi) - h_1(\xi')| < 2\varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$

$\Downarrow$

$h_1(\xi) = h_2(\xi)$.

$\longleftrightarrow$

Θεώρημα (Tietze)

Έστω $f: A \neq \emptyset \to \mathbb{R}$, A κλειστό, f συνεχής

Τότε: $\exists \tilde{f}: X \to \mathbb{R}$ συνεχής τ.ω

$$\tilde{f}_{|A} \equiv f \quad \text{και} \quad \sup_X |\tilde{f}| = \sup_A |f|$$

Απόδειξη • Αν $f(A) \subseteq [-1, 1]$ τότε ισχύει

• Αν $\sup |f| \leq M$ ($M > 0$ οποιοδήποτε)

Θέτω: $g = \dfrac{f}{M}$

όπου g συνεχής και $\sup_A |g| \leq 1$

$\Rightarrow \exists\ \tilde{g}: X \to \mathbb{R}$ με $\tilde{g}|_A \equiv g$ τ.ω $\sup_X |\tilde{g}| < 1$

<u>Θέτω</u> $\tilde{f} = M\tilde{g}$

Τότε: $\tilde{f}|_A = M\tilde{g}|_A = Mg|_A = M\frac{f}{M}|_A = f$

και $\sup_X |\tilde{f}| \leq M \sup_X |\tilde{g}| \leq M$

- <u>Έστω $\sup_A |f| = +\infty$</u>

<u>Θεωρώ</u> $h: (-1,1) \to \mathbb{R}$: $h(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$

$$h'(x) = \frac{2(x^2-1) - 2x\,2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2-1)^2} =$$

$$= -2\,\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$$

$\Rightarrow$ h γν. μονότονη και παραγωγίσιμη με παράγωγο που δεν μηδενίζεται πουθενά.

$\Rightarrow$ h^{-1} γν. μονότονη (άρα 1-1) και παραγωγίσιμη.

$\Rightarrow$ h, h^{-1} 1-1 και επί κ συνεχείς ($\Rightarrow$ h ομοιομορφισμός).

<u>Θέτω</u> $g = h^{-1} \circ f : A \to (-1,1) \subseteq [-1,1]$

<u>Ειδική</u> περίπτωση $\Longrightarrow$ $\exists\ \tilde{g}: X \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε:

$\tilde{g}|_A = g$

Θέτω: $\tilde{f} = h \circ \tilde{g} : X \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$$\boxed{\tilde{f}_{|A}} = h \circ (\tilde{g}_{|A}) = h \circ g = h \circ (h^{-1} \circ f) = \boxed{f}$$

Επειδή $A \subseteq X \Rightarrow \sup_X |\tilde{f}| \geq \boxed{\sup_A |\tilde{f}|}$

$$\| \quad \sup_A |f| = +\infty$$

$$\sup_X |\tilde{f}| = +\infty$$

$\longleftrightarrow$

Θεώρημα: Αν (X, d) συμπαγής τότε $(C(X), D)$ πλήρης.
όπου $D(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$

(ως προς την ομοιόμορφη νόρμα)

Απόδ. Έστω $\{f_n\} \subseteq C(X)$ $\boxed{\text{Cauchy}}$ $\Rightarrow$ Έστω $\varepsilon > 0$
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n, m \geq n_0$ $\underbrace{D(f_n, f_m) < \varepsilon}$

$$\Downarrow$$

$$\forall n, m \geq n_0 : \underbrace{\sup |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon}$$

$$\Downarrow$$

$$(*) \quad \boxed{\forall x \in X \ \forall m, n \geq n_0 \ |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon}$$

$$\Rightarrow \forall x \in X \ \boxed{\{f_n(x)\}} \text{ Cauchy}$$ (ως προς ευκλείδεια νόρμα)

αριθμοί $\Rightarrow$ πραγματική ακολουθία

$\Rightarrow \forall x \in X \quad \{f_n(x)\}$ συγκλίνει (Αφού $f_n(x)$ Cauchy και ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος)

Θέτω: $f(x) = \lim_n f_n(x)$

Στην (*) παίρνω $n \to \infty$: $f_n(x) \to f(x) \ \forall x \in X$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \leq 2\varepsilon \ \forall x \in X, \forall n \geq n_0$$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω $\forall x \in X \ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{ομοιόμ.}} f \iff f_n \xrightarrow{D} f \Rightarrow (C(X), D)$ πλήρης.

$\longleftrightarrow$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $S \subseteq C(X)$. Το S είναι ισοσυνεχές στο $x \in X$ αν:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_x > 0$ τ.ω $\forall f \in S \ \forall y \in B_{\delta_x}(x) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Και S ισοσυνεχές αν είναι ισοσυνεχές στο $x \ \forall x \in X$.

Θεώρημα (Arzela-Ascoli) Έστω (X, d) συμπαγής μ.χ και $S \subseteq C(X)$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

① S συμπαγές (ως προς την D)

② S κλειστό, φραγμένο (ως προς την D) και ισοσυνεχές.

Απόδειξη: ① $\Rightarrow$ ② S συμπαγές $\Rightarrow S$ κλειστό και φραγμένο

Άρα αρκεί νδο S ισοσυνεχές.

Έστω $\varepsilon > 0$

$\{ B(f, \varepsilon/3) \ f \in S \}$ ανοικτή κάλυψη του S

$\xRightarrow{S \text{ συμπαγές}} \exists f_1, f_2, \dots, f_n \in S$ τω $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \varepsilon/3)$

$\xRightarrow[\text{της } f_i]{\text{συνέχεια}} \forall x \in X \ \exists r_{ix} > 0$ τω $\forall y \in B_{r_{ix}}(x) : |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon/3$

Θέτω: $\boxed{r_x = \min\{r_{1x}, \dots, r_{nx}\} \quad x \in X}$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} \ \forall x \in X \ \forall y \in B_{r_x}(x) : |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon/3$

Έστω $f \in S$, $x \in X$, $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ τω $f \in B(f_i, \varepsilon/3) \Longleftrightarrow$

τυχαίο x άρα ισχύει για όλα τα x $\qquad D(f, f_i) < \varepsilon/3$

Έστω $y \in B(x, r_x)$:

$|f(x) - f(y)| = |(f(x) - f_i(x)) + (f_i(x) - f_i(y)) + (f_i(y) - f(y))|$

$\leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)|$

$\leq \underbrace{D(f_i, f)}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{\varepsilon/3}_{+\varepsilon/3} + \underbrace{D(f_i, f)}_{< \varepsilon/3}$

$\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \leq \varepsilon$

$\Longrightarrow S$ ισοσυνεχές στο $X \Rightarrow S$ ισοσυνεχές

(2) $\Rightarrow$ (1) Έστω $\{f_n\} \subseteq C(X)$. Αρκεί νδο η $\{f_n\}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (γιατί τότε το όριο της θα είναι μέσα στο S αφού S κλειστό. Άρα κάθε ακολουθία θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στο S. Αυτό είναι ισοδύναμο με κάποιο ορισμό της συμπάγειας)

<u>Ισχυρισμός 1</u> $\exists M>0$ τω $\forall f \in S$ $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in X$

<u>Απόδ</u> $\exists M_1 > 0$ τω $\forall g \in S$ $D(f,g) \leq M_1$

<u>Έστω $g \in S$:</u>

$\exists M_g > 0 : |g(x)| \leq M_g$ $\forall x \in X$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq |f(x)-g(x)| + |g(x)|$$

$$\leq D(f,g) + M_g \leq \underbrace{M_1 + M_g}_{M} \quad \forall x \in X$$

$\longleftrightarrow$

(Αφού S ισοσυνεχές για $\varepsilon = 1/k$ έχουμε:)

$\Leftarrow$

Για $x \in X$: $k \in \mathbb{N}$ $\exists r_{k,x} > 0$ τω $\forall y \in B_{r_{k,x}}(x)$ $\forall f \in S$:

$$|f(x) - f(y)| < 1/k$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ $\{B_{r_{k,x}}(x) \; x \in X\}$ ανοιχτή κάλυψη του $X \Rightarrow$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists x_1^k, \dots, x_{n_k}^k \in X$ τω $\boxed{X = \bigcup_{i=1}^{n_k} B_{r_k, x_i^k}(x_i^k)}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \exists i \in \{1, \dots, n_k\} \text{ τω } \forall y \in B_{r_k, x_i^k}(x_i^k) : \quad |f(x) - f(y)| < 1/k \ \forall f \in S}$

Θέταμε $r_{ki} = r_{k, x_i^k}$ ①

Θέταμε $\boxed{F = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_1^k, \dots, x_{n_k}^k\}}$ → το πολύ αριθμήσιμο

Γράφουμε: $F = \{x_1, x_2, \dots\}$

Αριθμούμε αντίστοιχα τις ακτίνες $r_1, r_2, \dots$